

2. INTEGRAL MÚLTIPLE DE RIEMANN

2.4. Integral de Riemann sobre otros recintos acotados

Integral de Riemann sobre otros recintos acotados

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado, y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Se considera un rectángulo $R \subset \mathbb{R}^n$ que contenga a D , y se define $\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R}$ como la extensión nula de f a R :

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & , \text{ si } \mathbf{x} \in D \\ 0 & , \text{ si } \mathbf{x} \in R \setminus D \end{cases}$$

Se dice que f es integrable Riemann sobre D si \tilde{f} es integrable sobre R , y se define la integral como:

$$\int_D f = \int_R \tilde{f}$$

Observación: La integral no depende del rectángulo elegido, con tal que contenga a D .

Teorema (funciones integrables)

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, y $A \subset D \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto de discontinuidades de f . Entonces, si $A \cup \partial D \subset \mathbb{R}^n$ tiene contenido nulo, la función f es integrable Riemann sobre D .

Propiedades de la integral

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado, f y g funciones acotadas e integrables Riemann sobre D , y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Es fácil comprobar que se verifican las siguientes propiedades:

1. $\alpha f + \beta g$ es integrable Riemann sobre D y: $\int_D (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_D f + \beta \int_D g$.
2. Si $f \leq g$, es decir, si $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in D$, entonces: $\int_D f \leq \int_D g$.
3. Si $m \leq f(\mathbf{x}) \leq M$, para todo $\mathbf{x} \in D$, entonces: $mV(D) \leq \int_D f \leq MV(D)$.
4. $|f|$ es integrable sobre D y: $|\int_D f| \leq \int_D |f|$.
5. Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es otro conjunto acotado sobre el que f es integrable y $\overset{\circ}{D} \cap \overset{\circ}{E} = \emptyset$, entonces f es integrable sobre $D \cup E$ y: $\int_{D \cup E} f = \int_D f + \int_E f$.

Teorema del valor medio integral

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua e integrable sobre D . Entonces, existe $\mathbf{x}_0 \in D$ tal que:

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0) \cdot V(D)$$